学术论文

一种新型的三 I 算法及其逻辑基础*

王国俊[1,2] 宋庆燕[1]

1. 陕西师范大学数学研究所，西安 710062；2. 西安交通大学基础科学研究中心，西安 710049

摘要 在 Fuzzy 推理中提出了“过半可信”原则，并证明了 R_0-型三角模恰为可实现这一原则的三角模．在此基础上，将 Fuzzy 推理中的大、小前提作了修正从而摒弃了不可信的推理成分，提出了一种新型的三 I 算法(Triple I)*．研究了逻辑系统 $\mathscr{L}^*$ 中的形式化推理机制，基于根的理论为新型三 I 算法奠定了严格的逻辑基础．

关键词 过半可信原则 (Triple I)* 形式系统 $\mathscr{L}^*$ 根

Zadeh 于 1973 年提出了 Fuzzy 推理的思想并给出了著名的 CRI 算法[1]．由于 Fuzzy 推理适用于含有模糊性的不确定性推理并且贴近人类的思维模式，所以 Fuzzy 推理一经提出，就受到了广泛的关注，很快就涌现出一大批理论性的与应用性的研究成果[2,3]．然而 Fuzzy 推理远较经典逻辑学中的二值推理复杂．从应用的角度看，似乎很难找到一种普遍适用于各种不同应用领域的 Fuzzy 推理方法．从理论的角度看，Zadeh 的 CRI 算法及其演变[3]的推理机制也似乎有若干值得推敲之处．也许这正是导致 1993 年美国人工智能年会上那场争论的原因所在[4~7]．可见 Fuzzy 逻辑与 Fuzzy 控制虽然已取得令人瞩目的成就，然而它们似乎并未被人工智能学界所普遍接受．正如 Dubois 等在文献[2，3]中所说，其主要原因在于人工智能崇尚符号化并扎根于逻辑学和基于语构工具的自动推理，而 Fuzzy 逻辑则依赖于 number crunching(玩弄数字)式的数值计算。这正是两者之间的鸿沟．为尝试将二者沟通，文献[8]在几种经典逻辑系统中实现了 Fuzzy 推理的形式化机制，这对于填补上述鸿沟无疑是迈出了重要的一步．另一方面，文献[9]中为 Fuzzy 命题演算提出了一种形式演绎系统 $\mathscr{L}^*$，文献[10]中证明了这种系统是完备的，从而系统 $\mathscr{L}^*$ 较好地为 Fuzzy 推理从语构上建立了逻辑基础．文献[8]中已经基于根的理论在经典二值逻辑中为 Fuzzy 推理建立了形式化理论，本文则进一步将这种形式化理论推广于系统 $\mathscr{L}^*$ 之中．值得注意的是，$\mathscr{L}^*$ 系统中使用的 R_0 算子恰能反映符合常识推理思想的过半可信原则．本文中未定义的概念可参看文献[11～14]．

1 Fuzzy MP 问题在系统 $\mathscr{L}^*$ 中的形式化

设有命题 A，B 和 A^*，称由 $A\rightarrow B$ 和 A^* 求 B^* 的问题为广义 MP 问题．Zadeh 将广义 MP 问题转化为在 Fuzzy 系统中的下述 Fuzzy MP 问题：

$$\begin{array}{lll} \text{已知} & A(x)\longrightarrow B(y), & \\ \text{且给定} & A^*(x) \qquad\quad , & x\in X,\ y\in Y, \\ \hline \text{求} & \qquad\quad B^*(y). & \end{array} \tag{1}$$

这里 $A(x)$与 $A^*(x)$是 X 上的 Fuzzy 集，$B(y)$与 $B^*(y)$是 Y 上的 Fuzzy 集．按照文献[11]中提出的三 I 原则，(1) 式中的结论 $B^*(y)$应是 Y 上可由大前提 $A(x)\rightarrow B(y)$与小前提 $A^*(x)$联合推出的最小 Fuzzy 集，即，$\forall y\in Y$，$B^*(y)=\sup\limits_{x\in X}[A^*(x)\otimes(A(x)\rightarrow B(y))]$(参看文献[14])．因为 Fuzzy 命题演绎系统 $\mathscr{L}^*$ 是纯符号化的逻辑系统，所以为了在 $\mathscr{L}^*$ 中建立 Fuzzy MP 问题的形式化理论，必须把上述“number crunching”式的 Fuzzy MP 问题彻底

2003-01-02 收稿，2003-02-13 收修改稿

* 国家自然科学基金重点资助项目(批准号：19831040)

E-mail：gjwang@snnu.edu.cn

地形式化，为此应当解决以下三个问题：

(i) 在全部命题(即抽象公式)集 $F(S)$ 中引入序结构，以便界定结论 B^* 的“最小性”.

(ii) 建立由两个或多个命题联合推出一个“最小命题”的逻辑演绎机制.

(iii) 由于 Fuzzy 命题演绎系统 $\mathscr{L}^*$ 不涉及变元，应当将含有变元的(1)式转化为不含变元的一组形式化公式间的演绎问题.

1.1 $F(S)$中的序结构和根的理论

设 $S=\{p_1, p_2, \cdots\}$ 是可数集，$\neg$ 是一元逻辑连接词，$\vee$ 与 $\rightarrow$ 是二元逻辑连接词，$F(S)$ 是由 S 生成的$(\neg, \vee, \rightarrow)$型自由代数，则称 S 中的元为原子命题或原子公式，称 $F(S)$ 中的元为命题或公式. 设 $\mathscr{L}^*$ 是在 $F(S)$ 上建立的包含 10 条公理和一条 MP 规则的 Fuzzy 命题演算系统[10]. 设 $\Gamma \subset F(S)$，$A \in F(S)$，用 $\Gamma \vdash A$ 表示 A 是 Γ-结论，令 $D(\Gamma)=\{A \in F(S) \mid \Gamma \vdash A\}$，把 $D(\{A\})$ 简记为 $D(A)$. 在 $F(S)$ 中引入序结构如下：

定义 1 设 $A, B \in F(S)$，规定

$$A \prec B \quad \text{当且仅当} \quad \vdash A \rightarrow B, \tag{2}$$

则 $\prec$ 显然是自反的和传递的，从而 $\prec$ 是 $F(S)$ 上的预序，$(F(S), \prec)$ 构成一个预序集.

已知 $A \rightarrow B$ 和 A^* 时，广义 MP 问题的解 B^* 就是 $(F(S), \prec)$ 中使 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A^* \rightarrow B^*)$ 成立的最小 B^*.

设 A 是 $F(S)$ 中的定理，则对任一 $B \in F(S)$ 恒有 $\vdash B \rightarrow A$，即 $B \prec A$，所以 A 是 $(F(S), \prec)$ 中的最大元. 设 A 为矛盾式，则对任一 $B \in F(S)$ 恒有 $\vdash A \rightarrow B$，即 $A \prec B$，所以 A 为 $(F(S), \prec)$ 中的最小元. 即，定理与矛盾式分别是 $(F(S), \prec)$ 中的最大元与最小元.

定义 2 设 $\Gamma \subset F(S)$，如果 $D(\Gamma)$ 在 $(F(S), \prec)$ 中有最小元，比如是 A，则称 A 为 Γ 的**根**.

例 1 设 $\Gamma=F(S)$，则 $D(\Gamma)=F(S)$，矛盾式为 Γ 的根. 设 $\Gamma=\varnothing$，则 $D(\Gamma)=\{A \in F(S) \mid \vdash A\}$，定理为 Γ 的根. 但 $F(S)$ 的子集 Γ 不必有根. 比如，令 $\Gamma=S$，则 Γ 没有根. 首先可以证明 $D(S) \neq F(S)$. 事实上，若 $D(S)=F(S)$，则任取矛盾式 A，因为 A 中只含有有限多个原子公式，所以取 n 充分大就有 $A \in D(\{p_1, \cdots, p_n\})$. 这时令 $r_i=\neg(p_i \rightarrow \neg p_i)$，可以证明

$$B=(r_1 \rightarrow (r_2 \rightarrow (\cdots(r_n \rightarrow A)\cdots))) \tag{3}$$

是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理，从而应当是重言式. 取赋值 $v \in \Omega$ 使 $v(p_i)=1$，$i=1, \cdots, n$，则由 $\rightarrow$ 为 R_0 算子知 $v(r_i)=1 (i=1, \cdots, n)$. 但由 A 为矛盾式知 $v(A)=0$，所以由(3)式知 $v(B)=0$. 矛盾. 可见 $D(S) \neq F(S)$. 由此易知 $D(S)$ 中不含有矛盾式. 任取 $A=f(p_{i_1}, \cdots, p_{i_m}) \in D(S)$，则 A 不是矛盾式，故有赋值 $v \in \Omega$ 使 $v(A)=1$. 不妨设对充分大的 n (n 大于各标号 $i_1, \cdots, i_m$) 有 $v(p_n)=0$，则由 $v(A \rightarrow p_n)=0$ 知 $A \rightarrow p_n$ 不是定理，从而 $A \prec p_n$ 不成立. 但 p_n 是 $D(S)$ 的成员，所以 A 不是 $D(S)$ 的最小元. 因为 A 是 $D(S)$ 中的任意元，所以 S 没有根.

在上例中看到 $F(S)$ 的非空子集 Γ 不必有根. 下面证明当 Γ 是有限集时根一定存在. 但我们先引入一个新的逻辑连接词.

定义 3 设 $A, B \in F(S)$，规定

$$A \otimes B=\neg(A \rightarrow \neg B). \tag{4}$$

可以证明以下两个命题成立：

命题 1 在可证等价的意义下 $\otimes$ 是交换的、结合的，并且以 $F(S)$ 中的定理为 $\otimes$-乘法单位.

命题 2 设 $A, B \in F(S)$，则

(i) $(A \otimes B \rightarrow C) \sim (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

(ii) $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A \otimes B))$

命题 3 设 $A \in F(S)$，则

$$A \vdash A^2, \ A^2 \vdash A. \tag{5}$$

这里 A^2 是 $A \otimes A$ 的简写.

证明 $A^2 \rightarrow A^2$ 显然是定理，所以由命题 2(i) 知 $A \rightarrow (A \rightarrow A^2)$ 是定理，从而由假设 A 出发用两次 MP 即推得 A^2，所以 $A \vdash A^2$.

反过来，由 $(A^2 \rightarrow A)=(\neg(A \rightarrow \neg A) \rightarrow A) \sim (\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg A))$ 知 $A^2 \rightarrow A$ 为定理，所以由假设 A^2 可推得 A，从而有 $A^2 \vdash A$.

注 1 由(5)式得不出 A 与 A^2 可证等价的结论，这是由于虽然可由(5)式中的 $A^2 \vdash A$ 推出 $\vdash (A^2 \rightarrow A)$，但不能由(11)式中的 $A \vdash A^2$ 推出 $\vdash (A \rightarrow A^2)$，因为在 $\mathscr{L}^*$ 系统中演绎定理不成立[14]. 不过在文献[15]中已证明了下述的广义演绎

定理:

定理 1(广义演绎定理) 设 $\Gamma \subset F(S)$, A, $B \in F(S)$.

$$若\ \Gamma \cup \{A\} \vdash B,\ 则\ \Gamma \vdash A^2 \to B. \tag{6}$$

现在可以证明下面的

定理 2 设 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_n\} \subset F(S)$, 则 $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)^2$ 是 Γ 的根.

证明 由命题 1 知$\otimes$是交换的与结合的, 所以写法 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$ 无歧义. 由命题 2 的(i)用数学归纳法可证

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \to B) \sim (A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to B) \cdots))). \tag{7}$$

因为 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \to A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$ 为定理, 所以在(7)式中取 B 为 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$ 可得

$$\vdash (A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) \cdots))). \tag{8}$$

由(8)式知 n 次使用 MP 规则就可由 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_n\}$ 推出 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$. 从而 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \in D(\Gamma)$.

其次有 $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)^2 \in D(\Gamma)$. 事实上, 令 $A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$. 上面已证 $A \in D(\Gamma)$, 即 $\Gamma \vdash A$. 又, 由命题 3 有 $A \vdash A^2$, 所以 $\Gamma \vdash A^2$. 这就证明了 $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)^2 \in D(\Gamma)$.

最后证明 $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)^2$ 是 $D(\Gamma)$ 中的最小元. 事实上, 任取 $B \in D(\Gamma)$, 则 $\Gamma \vdash B$, 即 $\{A_1, \cdots, A_n\} \vdash B$. n 次使用广义演绎定理可得

$$\vdash (A_1^2 \to (A_2^2 \to (\cdots \to (A_n^2 \to B) \cdots))). \tag{9}$$

以 A_i^2 取代 $A_i (i = 1, \cdots, n)$ 就可由(7)式与(9)式得 $\vdash (A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_n^2 \to B)$. 所以由(2)式得 $A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_n^2 \prec B$. 这就证明了 $A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_n^2$ 是 $D(\Gamma)$ 中的最小元. 由命题 1, $A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_n^2 \sim (A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)^2$, 所以定理 2 成立.

注 2 至此本节初提出的(i)与(ii)两个问题已解决. 由 $A \to B$ 与 A^* 求 B^* 的广义 MP 问题在 $\mathscr{L}^*$ 中的形式化的三 I 解就是 $\{A \to B, A^*\}$ 的根.

1.2 Fuzzy MP 问题的三 I 解在$\mathscr{L}^*$中的形式化

定义 4 设 $\Gamma_i \subset F(S)$, $(i = 1, \cdots, n)$, 则 $\bigcap_{i=1}^{n} D(\Gamma_i)$ 中的公式叫 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ 的**公共推论**, 其中若有最小者, 则称此最小公式为 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ 的**公根**.

命题 4 设 $\Gamma_i \subset F(S)$, C_i 是 Γ_i 的根 $(i = 1, \cdots, n)$, 则 $\sup_{i \leqslant n} C_i$ 是 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ 的公根, 这里 $\sup_{i \leqslant n} C_i = C_1 \vee \cdots \vee C_n$.

证明 令 $B^* = \sup_{i \leqslant n} C_i$, 则 $C_i \to B^*$ 为定理, 从而由 $C_i \in D(\Gamma_i)$ 知 $B^* \in D(\Gamma_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 由此得 $B^* \in \bigcap_{i=1}^{n} D(\Gamma_i)$, 从而 B^* 是 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ 的公共推论. 设 D 是 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ 的任一公共推论, 则由 C_i 是 Γ_i 的根知 $C_i \prec D$, 即

$$\vdash C_i \to D,\ i = 1, \cdots, n. \tag{10}$$

由(10)式即得 $\vdash C_1 \vee \cdots \vee C_n \to D$, 从而 $\sup_{i \leqslant n} C_i \prec D$, 即 $B^* \prec D$(参看文献[14]). 这就证明了 $B^* = \sup_{i \leqslant n} C_i$ 是 $\Gamma_1, \cdots \Gamma_n$ 的公根.

以下设(1)式中的论域 $X = \{x_1, \cdots x_n\}$ 为有限集. 因为 n 可取得任意大, 所以这种假设不会对 Fuzzy 推理的应用有什么限制. 设(1)式中的变元 x 在 X 中变化, 并分别将 $A(x_i)$ 与 $A^*(x_i)$ 简记为 A_i 与 A_i^* $(i = 1, \cdots, n)$. 再设变元 y 已固定, 分别将 $B(y)$ 与 $B^*(y)$ 简记为 B 与 B^*. 因为(1)式要求对任意给定的 y, 对每个变元 x 而言(1)式均成立, 所以按以上的简化约定(1)式可分拆为 n 个推理式如下:

$$\frac{\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow B \\ A_1^* \end{array}}{B^*}, \cdots, \frac{\begin{array}{l} A_n \longrightarrow B \\ A_n^* \end{array}}{B^*}. \tag{11}$$

令 $\Gamma_i = \{A_i \to B, A_i^*\}$ $(i = 1, \cdots, n)$. 由(11)式知 B^* 是 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ 的公共推论. 再由三 I 原则, B^* 应具有最小性, 所以 B^* 就是 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ 的公根. 由定理 2 知 Γ_i 的根(即其三 I 解)为 $(A_i^* \otimes (A_i \to B))^2$, 也即 $(A_i^*)^2 \otimes (A_i \to B)^2$ $(i = 1, \cdots, n)$, 所以由命题 4 并分别将简化的符号还原即得下面的

定理 3 在 Fuzzy 命题演绎系统 $\mathscr{L}^*$ 中, Fuzzy MP (1) 式的形式化的三 I 解 B^* 由下式确定:

$$B^*(y) = \sup_{x \in X} [(A^*(x))^2 \otimes (A(x) \to B(y))^2],\quad y \in Y. \tag{12}$$

因为在经典二值逻辑系统 L 中 $A^2=A\otimes A=\neg(A\to\neg A)\sim A\wedge A\sim A$，即 A^2 与 A 可证等价，所以由定理3即可得出文献[8]的如下重要结果：

定理4 在经典命题演绎系统 L 中，Fuzzy MP(1)式的形式化的三I解 B^* 由下式确定：

$$B^*(y)=\sup_{x\in X}[A^*(x)\otimes(A(x)\to B(y))],\quad y\in Y. \tag{13}$$

注3 (13)式就是被认为是"number crunching"式的三I解的纯符号化的形式. 而(12)式则是(13)式在系统 $\mathscr{L}^*$ 中的形式化推广.

2 关于Fuzzy推理规则的分析

2.1 Fuzzy规则前件的可靠性

Fuzzy推理的一般形式为[14]

$$\begin{array}{lll} \text{已知} & A_{11},\cdots,A_{1m}\longrightarrow B_1 & \\ & \cdots & \\ & A_{n1},\cdots,A_{nm}\longrightarrow B_n & (14)\\ \text{且给定} & A_1^*,\cdots,A_m^* & \\ \hline \text{求} & \qquad\qquad B^* & \end{array}$$

上式中共有 n 个大前提 $A_{i1},\cdots,A_{im}\to B_i$ ($i=1,\cdots,n$). 通常均使用乘积方法把这些大前提中的 m 个前件按Fuzzy集的乘法转化为一个前件，对 $A_1^*,\cdots,A_m^*$ 也作同样处理，则(14)式可转化为

$$\begin{array}{lll} \text{已知} & A_1\longrightarrow B_1 & \\ & \cdots & \\ & A_n\longrightarrow B_n & (15)\\ \text{且给定} & A^* & \\ \hline \text{求} & \qquad B^* & \end{array}$$

这里 $A_1,\cdots,A_n,A^*$ 为某论域 X 上的Fuzzy集，$B_1,\cdots,B_n,B^*$ 为论域 Y 上的Fuzzy集. (14)式或(15)式中作为大前提的各已知规则是来自实践经验的，用Fuzzy集表达后虽然都带有一定的近似性，但均为可靠规则. 根据经典逻辑的观点，如果一个蕴涵式 $A\to B$ 的前件为矛盾式，则此规则 $A\to B$ 成立. 但对来自实际的各规则 $A_i\to B_i$ 而言，都是在 A_i 成立的情况下推得 B_i 成立的. 所以进行Fuzzy推理时对蕴涵算子 R 的选择并不一定要求它满足条件 $R(0,b)=1$(即 $0\to b=1$). 比如，文献[16]中成功地实现了4级倒立摆的Fuzzy控制，而作为基本理论工具的蕴涵算子是Mamdani算子[2,14]，其表达式为 $R(a,b)=a\wedge b$，当 $a=0$ 时 $R(a,b)=1$ 根本不成立. 又如，Willmott蕴涵算子的表达式为[2]

$$R(a,b)=[(1-a)\vee b]\wedge[a\vee(1-b)\vee(b\wedge(1-a))],$$

当 $a=0$ 时有 $R(0,b)=(1-b)\vee b$，$R(0,b)=1$ 也不必成立. 可见对于来自实际的Fuzzy规则而言，其前件应当有相当的可信度，对于那些真度连 $\frac{1}{2}$ 都超不过的值自然可不予考虑.

2.2 蕴涵算子的选择

在Fuzzy推理中运算 $\neg$ 与 $\vee$ 的定义基本上是统一的，即

$$\neg a=1-a,\ a\vee b=\max\{a,b\},\ a,b\in[0,1]. \tag{16}$$

但蕴涵运算 $\to$ 的定义则差别很大，Dubois等在他们的综述文章[2, 3]中对此有详细的评述. 近年来随着Fuzzy逻辑理论研究的逐渐深入，人们发现能与某个三角模 $\otimes$ 形成伴随对的蕴涵算子 $\to$ 具有许多优点，在应用上也有方便之处. 这里 $\otimes$ 与 $\to$ 满足条件[17]

$$a\otimes b\leqslant c\ \text{当且仅当}\ a\leqslant b\to c,\ a,b,c\in[0,1]. \tag{17}$$

如前所述，我们在Fuzzy MP的三I解中正是使用的这种伴随对. 即，对蕴涵算子 $\to$ 的选择应遵循下面的

条件1 蕴涵算子 $\to$ 应当具有与之相伴随的三角模 $\otimes$. 目前已知的较常用的蕴涵算子(记作 R)及相应的三角模如下：

(i) Lukasiewicz：

$$R_L(a,b)=(1-a+b)\wedge 1,\ a\otimes_L b=(a+b-1)\vee 0. \tag{18}$$

(ii) Gödel：

$$R_G(a,b)=\begin{cases}1, a\leqslant b\\ b, a>b,\end{cases}\quad a\otimes_G b=a\wedge b. \tag{19}$$

(iii) Goguen:

$$R_\pi(a,b)=\begin{cases}1, & a=0,\\ \dfrac{b}{a}\wedge 1, & a\neq 0,\end{cases}\quad a\otimes_\pi b=ab. \tag{20}$$

(iv) R_0:

$$R_0(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b,\\ (1-a)\vee b, & a>b,\end{cases}$$

$$a\otimes_0 b=\begin{cases}a\wedge b, & a+b>1,\\ 0, & a+b\leqslant 1.\end{cases} \tag{21}$$

又，为适应多重推理的需要，我们提出了下面的条件[18]：

条件 2 蕴涵算子→应具有较好的传递性，即

$$\text{若}\quad a\to b\geqslant\alpha>\frac{1}{2}, b\to c\geqslant\beta>\frac{1}{2},\quad \text{则 } a\to c\geqslant\alpha\wedge\beta \tag{22}$$

$$\text{若}\quad a\geqslant\alpha>\frac{1}{2},\ a\to b\geqslant\beta>\frac{1}{2},\quad \text{则 } b\geqslant\alpha\wedge\beta$$

容易验证 R_0 算子与 Gödel 算子都满足(22)式. Lukasiewicz 算子有许多优点，但传递性差似乎是一个不足. 比如，当 $a\to b=0.6$，$b\to c=0.6$ 时 $a\to c$ 的值仅为0.2. 它不满足条件2. Goguen 算子也不满足条件2.

最后，根据2.1中的分析，我们希望以下条件能满足：

条件 3 将推理 $a\to b$ 的前件 a 适当改造为 a^*，使得

$$a^*=\begin{cases}a, & a>\dfrac{1}{2},\\ 0, & a\leqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{23}$$

即，改造后的前件对不超过 $\frac{1}{2}$ 的值可自动删除，同时保持超过 $\frac{1}{2}$ 的值不变.

关于条件3，可以证明

命题 5 (i) 若令 $a^*=\neg(a\to\neg a)$，则(18)～(21)各式中的算子均满足条件"当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时 $a^*=0$."

(ii) 若令 $a^*=a\otimes a$，则(19)式与(21)式中的算子满足条件"当 $a>\frac{1}{2}$ 时 $a^*=a$".

(iii) (21)中的算子满足条件 $a\otimes_0 a=\neg(a\to_0\neg a)$.

从命题5立即得出下面的

推论 1 令 $a^*=a\otimes_0 a$，则 a^* 满足条件3.

2.3 过半可信原则

在前面已经分析过，Fuzzy 推理与经典逻辑学中的纯形式推理有一个不同之处，即：Fuzzy 推理的前提条件应当是可信的或基本上可信的. 所以在进行 Fuzzy 推理演算时对前提条件中真实程度不超过 $\frac{1}{2}$ 的值可不予考虑. 即，我们有如下的

过半可信原则 设 $A(x)$ 是 X 上作为推理前件的 Fuzzy 集，则当 $A(x)>\frac{1}{2}$ 时将 $A(x)$ 保留；当 $A(x)\leqslant\frac{1}{2}$ 时将 $A(x)$ 弃置不用，以0代之.

将这一原则与三I原则相结合可得出一种新的三I算法.

3 一种新型的三I算法(Triple I)*

三I原则指出，在广义 MP 问题中，B^* 是由 $A\to B$ 与 A^* 联合推出的最小结论. 这里 $A\to B$ 与 A^* 都是推出 B^* 的前提. 落实到 Fuzzy MP 的情形，根据过半可信原则，应当保留 $A(x)\to B(y)$ 和 $A^*(x)$ 的大于 $\frac{1}{2}$ 的值，同时丢掉它们不超过 $\frac{1}{2}$ 的值. 由上一节中的条件3以及推论1知，如果将蕴涵算子选为 R_0 算子并将 $A(x)\to B(y)$ 与 $A^*(x)$ 分别用 $(A(x)\to B(y))^2$ 与 $(A^*(x))^2$ 去代换，就可实现上述要求. 即，我们有

求解 Fuzzy MP 问题的新型三I原则：(1)式中的结论 B^* 是 Y 上满足条件

$$(A(x)\to B(y))^2\to((A^*(x))^2\to B^*(y))=1,\quad x\in X,\ y\in Y \tag{24}$$

的最小 Fuzzy 集，这里 $a^2=a\otimes_0 a$.

相应地，新型三I算法(Triple I)*如下：

(Triple I)*：设→是 R_0 蕴涵算子，⊗是与→相伴随的三角模，则 Fuzzy MP 问题的解 B^* 存在且由下式给出：

$$B^*(y)=\sup_{x\in X}[(A^*(x))^2\otimes(A(x)\to B(y))^2],\quad y\in Y. \tag{25}$$

证明 设(25)式成立，则

$$(A^*(x))^2\otimes(A(x)\to B(y))^2\leqslant B^*(y),\quad x\in X,\ y\in Y. \tag{26}$$

注意⊗是交换的，由(17)式立即得出

$$(A(x)\to B(y))^2\leqslant(A^*(x))^2\to B^*(y),\quad x\in X,\ y\in Y.$$

由此即得(24)式.

反过来，设 $C(y)$ 满足新型三 I 原则，即，在(24)式中把 $B^*(y)$ 换为 $C(y)$ 时等式成立，则由(17)式得

$$(A^*(x))^2\otimes(A(x)\to B(y))^2\leqslant C(y),\quad x\in X,\ y\in Y.$$

即，对任一固定的 y，$C(y)$ 是上式左边表达式的上界($x\in X$)．又，(25)式表明 $B^*(y)$ 是上式左边表达式的上确界，所以 $B^*(y)\leqslant C(y)(y\in Y)$，即 B^* 具有最小性．这就证明了 B^* 是满足新型三 I 原则的 Fuzzy MP 问题的解.

注 4 将(25)式与(12)式比较看出，它们具有完全相同的形式，这表明在逻辑系统 $\mathscr{L}^*$ 中存在与新型三 I 算法完全和谐的形式化解．又，在 $\mathscr{L}^*$ 系统中容易由(2)式与(4)式证明

$$A\otimes B\prec C \text{ 当且仅当 } A\prec B\to C \tag{27}$$

这恰与(25)式的证明中反复使用的伴随对性质(17)式成对应．这表明(25)式不只与(12)式外形相同，而且相应的推理机制也相同．所以(12)式可以看作是(25)式的严格的逻辑背景，同时(25)式也可看作是逻辑演绎形式(12)式在 Fuzzy 推理中的实现．这种和谐性不是偶然的．因为 $\mathscr{L}^*$ 系统正是 R_0 语义的公理化[10].

例 2 设 $X=Y=[0,1]$,

$$A(x)=\begin{cases}1-x, & x>\frac{3}{5},\\ \left(\frac{x+1}{6x}\right)^{\frac{3}{2}}, & x\leqslant\frac{3}{5},\end{cases}$$

$$B(y)=\frac{y+2}{5},\quad A^*(x)=\frac{5x}{6}$$

按(Triple I)* 求解 B^*.

解 根据 R_0 算子的特性知(25)式可化简为

$$B^*(y)=\sup\left\{A^*(x)\otimes R_0(A(x),B(y))\ \middle|\ A^*(x)>\frac{1}{2},R_0(A(x),B(y))>\frac{1}{2}\right\}. \tag{28}$$

令 $A^*(x)=\frac{5x}{6}>\frac{1}{2}$ 得 $x>\frac{3}{5}$，所以 $A(x)=1-x$．又，由 $x>\frac{3}{5}$ 知 $A(x)=1-x<\frac{2}{5}\leqslant\frac{y+2}{5}=B(y)$ 从而 $R_0(A(x),B(y))=1>\frac{1}{2}$．所以由(28)式得

$$B^*(y)=\sup\left\{A^*(x)\otimes R_0(A(x),B(y))\ \middle|\ x>\frac{3}{5}\right\}=\sup\left\{\frac{5x}{6}\otimes 1\ \middle|\ x>\frac{3}{5}\right\}=\frac{5}{6}.$$

由于不涉及对 $A^*(x)\leqslant\frac{1}{2}$ 和 $R_0(A(x),B(y))\leqslant\frac{1}{2}$ 情形的计算，新三 I 方法的算式(25)要简单许多.

4 结束语

作为 Fuzzy 推理的基本模式，Fuzzy MP 问题的求解原理及其计算曾被看作是偏离了人工智能的主流思想的[2,3]．本文首次基于根的理论在系统 $\mathscr{L}^*$ 中建立了 Fuzzy MP 问题的形式化推理机制，在所得的定理 3 中给出了与求解 Fuzzy MP 问题的三 I 算法相和谐的逻辑算式(12)．另一方面，本文基于对 Fuzzy 推理规则前件可靠性的分析提出了过半可信原则，并通过命题 5 证明了 R_0 算子恰可用来在 Fuzzy MP 问题的新型三 I 算法中实现过半可信原则．所得(25)式与逻辑(12)式无论在外形上还是在推导机制上均完全一致．这种一致也反映了 R_0 语义理论与 $\mathscr{L}^*$ 语构理论的和谐性．所以似乎可以说本文为将命题演算范围内的 Fuzzy 推理引入人工智能

领域奠定了初步的基础. 涉及谓词演算的 Fuzzy 推理的形式化问题相当复杂, 我们将在另文中讨论.

参 考 文 献

1 Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans Systems, Man and Cybernet, 1973, 3: 28

2 Dubois D, et al. Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40: 142

3 Dubois D, et al. Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 2: Logic approaches. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40: 203

4 Elken C. The paradoxical success of fuzzy logic. IEEE Expert, 1994, 9(4): 3

5 吴望名. 关于模糊逻辑的一场争论. 模糊系统与数学, 1995, 9(2): 1

6 李洪兴. 从模糊控制的本质看模糊逻辑的成功. 模糊系统与数学, 1995, 9(4): 1

7 王国俊. 模糊推理与模糊逻辑. 系统工程学报, 1998, 13(2): 1

8 Wang G J. Non-fuzzy versions of fuzzy reasoning in classical logics. Information Sciences, 2001, 138: 211

9 王国俊. Fuzzy 命题演算的一种形式演绎系统. 科学通报, 1997, 42(10): 1041

10 裴道武, 等. 形式系统$\mathscr{L}^*$的完备性及其应用. 中国科学, E辑, 2002, 30(1): 56

11 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法. 中国科学, E辑, 1999, 29(1): 43

12 宋士吉, 等. 关于模糊推理的全蕴涵三 I 算法的约束度理论. 自然科学进展, 2000, 10(10): 884

13 宋士吉, 等. 模糊推理的反向三 I 支持算法. 中国科学, E辑, 2002, 32(2): 230

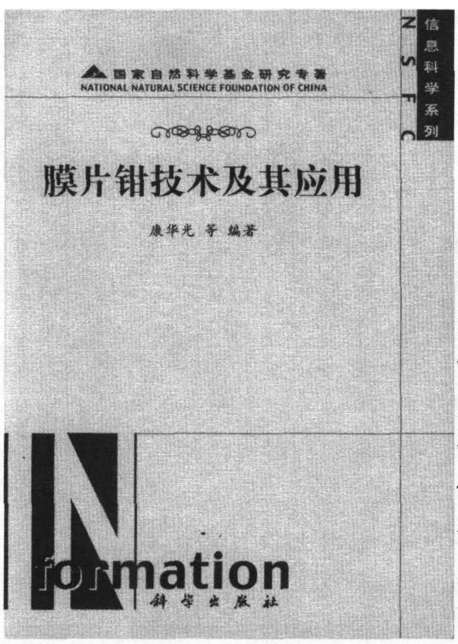
14 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京: 科学出版社, 2000

15 裴道武. 形式演绎系统$\mathscr{L}^*$中的$\otimes$运算与演绎定理. 模糊系统与数学, 2001, 15(1): 34

16 李洪兴, 等. 四级倒立摆的变论域自适应模糊控制. 中国科学, E辑, 2002, 32(1): 65

17 Hajek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998

18 王国俊. 修正的 Kleene 系统中的 Σ-(α-重言式)理论. 中国科学, E辑, 1998, 28(2): 146



国家自然科学基金研究专著

《膜片钳技术及其应用》康华光等 编著

科学出版社 定价: 40.00元

本书由国家自然科学基金委员会优秀研究成果专著出版基金资助出版. 它是作者在"膜片钳技术及其应用"领域所进行的研究工作的总结, 同时也吸取了国际上的先进技术和新近的研究成果. 内容包括: 细胞电生理与膜片钳技术, 膜片钳系统的组建及实验技术概要, 膜片钳放大器原理与低噪声设计, 单通道和全细胞电流记录技术, 数据采集和分析, 细胞分泌活动的膜电容监测技术和电流测量技术, 细胞内钙离子浓度的测量钙库特性, 脑切片膜片钳技术, 心肌细胞的药理特性和植物细胞的离子通道特性. 同时还包含低噪声测量, 信号的采集、分析与处理, 荧光测量, 细胞和组织成像技术等内容. 这些内容涉及生命科学和信息科学的诸多领域, 如生理学、药理学、细胞生物学、神经生物学、内分泌学、植物细胞生理学等.

书中的部分内容曾以讲义的形式在华中科技大学生物医学工程和生物物理专业的研究生教学中试用过多次, 取得了较好的成果.

本书可作为大专院校、科研院所的研究生、高年级大学生的细胞电生理、生物物理及相关课程的教材, 也可供从事科学研究的科技工作者参考.